Los Alamos Electronic ArXives
http://xxx.lanl.gov/physics/0005019

Electrodinámica Clásica

HARET C. ROSU

e-mail: rosu@ifug3.ugto.mx
fax: 0052-47187611
phone: 0052-47183089

Spanish Abstract

Aquí se bosquejan algunos temas impartidos durante el curso de electrodinámica clásica I, de acuerdo al programa del Instituto de Física de la Universidad de Guanajuato, México.

English Abstract

Excerpts are presented from a graduate course on Classical Electrodynamics held during the spring semester of 2000 at the Institute of Physics, Guanajuato State University, Mexico.

Mayo de 2000

Clase 1

Generalidades

Los campos eléctrico ($\vec{E}$) y de inducción magnética ($\vec{B}$) se introdujeron originalmente a través de la fuerza ejercida por cargas (q') o corrientes (I) sobre una carga de prueba (q):

$$\vec{F}_q = q\vec{E} \quad \leftrightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{q}\vec{F}_q,$$
$$d\vec{F}_I = Id\vec{l} \times \vec{B} \quad \leftrightarrow \quad B = \frac{|d\vec{F}_I|}{Idl\sin\alpha}.$$

De acuerdo con esto, $\vec{E}$ se interpreta como *fuerza por unidad de carga* y $\vec{B}$ como *fuerza por unidad de corriente*. Sin embargo ambos campos tienen significado propio, independiente del tipo de fuente que los genera.

Ahora bien, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ no son los únicos campos importantes en la electrodinámica. En la mayoría de las sustancias:

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P},$$
$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\ .$$

$\vec{D}$ se conoce como desplazamiento eléctrico, $\vec{H}$ campo magnético, $\vec{P}$ y $\vec{M}$ son, respectivamente, las polarizaciones eléctrica y magnética (i. e., representan el promedio macroscópico de dipolos eléctricos/magnéticos en el material en presencia de campos); $\epsilon_0 = 8.85\times10^{-12}C/Nm^2$, $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}H/m$ y $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$. La conexión entre los vectores $(\vec{P}, \vec{E})$ y $(\vec{M}, \vec{H})$ está determinada por las propiedades de cada sustancia. Para medios anisotrópicos la aproximación lineal en los campos es:

$$P_i = \epsilon_0\alpha_{ik}E_k,$$
$$M_i = \kappa_{ik}H_k,$$

con $i, k = 1, 2, 3$; α es el tensor de polarizabilidad y κ el tensor de magnetización. Entonces

$$D_i = \epsilon_{ik}E_k,$$
$$B_i = \mu_{ik}H_k,$$

donde $\epsilon_{ik} \equiv \epsilon_0(\delta_{ik} + \alpha_{ik})$, $\mu_{ik} \equiv \mu_0(\delta_{ik} + \kappa_{ik})$. Para medios isotrópicos:

$$\begin{aligned}
&\vec{P} = \epsilon_0 \alpha \vec{E} \\
&\vec{M} = \kappa \vec{H}, \quad \epsilon \equiv \epsilon_0(1+\alpha) \\
&\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \mu \equiv \mu_0(1+\kappa) \\
&\vec{B} = \mu \vec{H}.
\end{aligned}$$

Una vez definidos estos vectores, podemos presentar las ecuaciones de Maxwell (1873), que son en electrodinámica lo que las leyes de Newton en mecánica. Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial son

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{4}$$

(ρ es la densidad de carga y $\vec{j}$ la densidad de corriente). La forma integral de estas ecuaciones es

$$\begin{aligned}
&\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dA, \\
&\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0 \\
&\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA, \\
&\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dA = \int_V \rho dV.
\end{aligned}$$

De estas últimas se obtienen las condiciones de frontera entre dos medios:

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_{1,2} = \sigma, \tag{5}$$

$$\hat{n}_{1,2} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0, \tag{6}$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_{1,2} = 0, \tag{7}$$

$$\hat{n}_{1,2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}, \tag{8}$$

donde

$$|\vec{i}| = \left|\frac{dI}{dS}\right|.$$

Electrostática

Estudiamos un problema de electrostática si se satisfacen las condiciones

- No hay dependencia temporal en los campos.
- No existen cargas en movimiento.

Con esto, las ecuaciones de Maxwell (1 - 4) se reducen a

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \tag{9}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \tag{10}$$

En vista de (9), del cálculo vectorial sabemos que

$$\vec{E} = -\nabla\Phi.$$

De esta forma se introduce el potencial electrostático (Φ). Considerando medios isotrópicos (i. e., $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$) la ecuación (10) se reduce a

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

que se conoce como *ecuación de Poisson* (en ausencia de cargas se obtiene la *ecuación de Laplace*).

Por otra parte, las condiciones de frontera (5 - 8) se reducen a

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2, \\ \epsilon_1(\nabla\Phi\cdot\hat{n})_1 &- \epsilon_2(\nabla\Phi\cdot\hat{n})_2 = \sigma. \end{aligned}$$

En el caso de un conductor, dado que en su interior el campo eléctrico es nulo, se tiene

$$\Phi_{\text{conductor}} = \text{const},$$

y así, la densidad superficial de carga en el mismo es

$$\sigma = -\epsilon(\nabla\Phi\cdot\hat{n})_{\text{afuera}}.$$

Magnetostática

Las condiciones para hablar de magnetostática son:

- No hay dependencia temporal en los campos.
- Hasta hoy no se han detectado los monopolos magnéticos.

Bajo estas consideraciones las ecuaciones de Maxwell (1 - 4) se simplifican a

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}, \tag{11}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{12}$$

y las condiciones de frontera (5 - 8)

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{n}_{1,2} = 0,$$
$$\hat{n}_{1,2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}.$$

Al igual que en el caso electrostático, a partir del cálculo vectorial y (12) se introduce el potencial vectorial magnético como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

el cual, para materiales homogéneos e isotrópicos ($\vec{B} = \mu\vec{H}$), se obtiene de (11) como

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu\vec{j} \tag{13}$$

(NOTA: cabe aclarar que, dada su definición, da lo mismo tomar $\vec{A}$ que $\vec{A}+\nabla\varphi$; por ello se elige el potencial vectorial tal que $\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) = 0$, obteniendo así (13) a partir de (11)). Si se conoce $\vec{j}$, la solución a (13) es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

y para $r \gg r_{\text{sistema}}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

donde $\vec{m}$ es el momento magnético del sistema, dado como

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V \vec{r} \times \vec{j}(r) dV.$$

Por último, la energía de un campo magnético estático es

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{mag}} &= \frac{1}{2}\int \vec{B}\cdot\vec{H}dV \\
&= \frac{\mu}{8\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dVdV'.
\end{aligned}
$$

Para un sistema de conductores

$$
W_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik}I_iI_k,
$$

donde se define el coeficiente de inducción magnética entre las corrientes $\vec{j}_i$ y $\vec{j}_k$ como

$$
L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi I_iI_k}\int \frac{\vec{j}_k(\vec{r}_k)\cdot\vec{j}_i(\vec{r}_i)}{|\vec{r}_k-\vec{r}_i|}dV_kdV_i\ .
$$

Clase 2

En el caso en el cual los campos varían lentamente en el tiempo, o sea son funciones $f(at)$ donde se satisfacen las condiciones

$$a \ll 1 \qquad\qquad \omega \ll \frac{\sigma_c}{\epsilon} \qquad\qquad l \ll \lambda$$

con σ_c conductividad, ω, λ carácterísticas de las oscilaciones electromagnéticas, l dimensiones lineales del sistema.
Las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\bigtriangledown \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad\qquad \bigtriangledown \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\bigtriangledown \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad\qquad \bigtriangledown \cdot \mathbf{D} = \rho \ .$$

Obsérvese que se ha despreciado el término $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.
En el caso de campos variables arbitrarios para situaciones en las cuales no existen corrientes ni cargas presentes las ecuaciones de Maxwell toman la siguiente forma

$$\bigtriangledown \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad\qquad \bigtriangledown \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\bigtriangledown \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad\qquad \bigtriangledown \cdot \mathbf{D} = 0 \ .$$

Se tienen soluciones tipo ondas planas

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_o e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \ .$$

Las notaciones usadas son las usuales, ω es la frecuencia, $\mid \mathbf{k} \mid = \frac{\omega}{c}$ es el vector de onda, la dirección del cual, en medios isotrópicos, coincide con la dirección de la energía. El vector que justamente nos da el flujo de energía es el llamado vector de Poynting ($\mathbf{S}$), definido por

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \ . \tag{1}$$

Para campos variables la conexión entre los campos y los potenciales es de la forma

$$\mathbf{E} = -\bigtriangledown \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \bigtriangledown \times \mathbf{A} \ . \tag{2}$$

En general, los potenciales no son observables directamente (sino por sus efectos, **E**,**B**). Entre ellos existe una condición muy importante (de consistencia de la teoría electromagnética) que se llama condición de "gauge" que puede ser diferente en función de la condición considerada.
Una de las condiciones de "gauge" más frecuentes es la de Lorentz

$$\bigtriangledown \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \ . \tag{3}$$

Esta condición "gauge" es muy usada porque permite una simple generalización de las ecuaciones laplacianas del caso estático

$$\Box \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Box \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \tag{4}$$

estas ecuaciones son llamadas D'Alembertianas y $\Box \equiv \bigtriangledown^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Los potenciales que son solución de estas ecuaciones son llamados potenciales retardados (y no precisamente porque sean muy tontos) los cuales tienen la forma

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v})}{\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid} dV' \tag{5}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v})}{\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid} dV' \ . \tag{6}$$

A grandes distancias del sistema de cargas ($r >> \lambda$) y en el vacío, **B**,**E** y **A** se pueden escribir como sigue

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n} \tag{7}$$

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n} = (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \tag{8}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid}{v}) dV' \tag{9}$$

donde $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ es el versor en la dirección de la radiación. Si además $\lambda >> l$, con l la dimensión del sistema radiante, se puede usar la llamada aproximación multipolar, es decir, la radiación se puede representar como una sumatoria de

los campos emitidos por los dipolos, cuadrupolos, etc., que forman el sistema. Para el caso dipolar se tiene

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}}{4\pi c r} \tag{10}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r}(\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n} \times \mathbf{n}) \tag{11}$$

donde $\mathbf{p}$ es el momento dipolar del sistema. La intensidad de la radiación de un dipolo es

$$I = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ . \tag{12}$$

Magnetohidrodinámica

La magnetohidrodinámica estudia el comportamiento de los líquidos o los gases conductores (plasmas) en campos electromagnéticos. Se usan los conceptos hidrodinámicos: densidad, velocidad, presión, viscosidad. Las ecuaciones básicas son:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \bigtriangledown \cdot (\rho_m \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_m (\mathbf{v} \cdot \bigtriangledown)\mathbf{v} = - \bigtriangledown P + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \eta \bigtriangledown^2 \mathbf{v} + \rho_m \mathbf{g}$$

$$\bigtriangledown \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \bigtriangledown \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \qquad \mathbf{j} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

mas la ecuación de estado del fluido.

Relatividad Especial

La teoría de la relatividad especial surgió en la electrodinámica y se basa en dos postulados fundamentales

- La velocidad de la luz en el vacío $c = 2.99793 \times 10^8 m/s$ es una constante en todos los sistemas de referencia inerciales.
- Las leyes de la Física tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales (covariancia de las leyes naturales).

Las transformaciones de Lorentz en una dimensión se escriben así

$$x_1' = \frac{x_1 + i\beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x_2' = x_2 \qquad\qquad x_3' = x_3$$

$$x_4' = \frac{x_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

donde $x_4 = ict$, $x_4' = ict'$, $\beta = \frac{v}{c}$. Las velocidades u' de un cuerpo en K' con respecto a las velocidades u del mismo cuerpo en K están relacionadas mediante las siguientes expresiones

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \qquad u_y = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \qquad u_z' = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \ .$$

La segunda ley para partículas relativistas se escribe

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \ .$$

Cantidades del tipo $(\mathbf{p}, i/cE)$ son llamadas cuadrivectores, el anterior se llama cuadrivector de impulso-energía. Otros ejemplos de cuadrivectores son $(\mathbf{k}, i/c\omega)$; $(\mathbf{j}, ic\rho)$; $(\mathbf{A}, i/c\varphi)$. Existen también objetos llamados cuadritensores por extensión de lo anterior, algunos ejemplos de ellos son

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{\alpha\beta} = \Sigma_0 (F_{\alpha\mu}F_{\beta\mu} - \frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta}F_{\mu\eta}F^{\mu\eta}) \ .$$

Clase 3

Fuerza de Lorentz como fuerza lagrangiana

Las ecuaciones del movimiento de Euler-Lagrange son

$$Q_k = -\frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}}\right) \tag{1}$$

donde las Q_k son las fuerzas externas o fuerzas generalizadas y $L = T - U$.

Por otra parte, las ecuaciones de Maxwell en unidades de Gauss son

$$\begin{array}{llll} (M1) & \nabla \times \overrightarrow{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0 & (M3) & \nabla \cdot \overrightarrow{D} = 4\pi\rho \\ (M2) & \nabla \times \overrightarrow{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j} & (M4) & \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0 \ . \end{array}$$

Ahora con $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} = -q\nabla\varphi$ sólo en electrostatica en general la fuerza es la ley de Lorentz o sea

$$\overrightarrow{F}_L = q\left(\overrightarrow{E} + \frac{1}{c}\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right) \ . \tag{2}$$

Ahora de la $(M4)$ encontramos que $\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$ y sustituyendo en $(M1)$ encontramos

$$\nabla \times \overrightarrow{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \overrightarrow{A}\right) = 0 \tag{3}$$

por tanto

$$\nabla \times \left(\overrightarrow{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A}\right) = 0 \tag{4}$$

de aqui que podemos definir una función escalar tal que

$$-\nabla\Phi = \overrightarrow{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A} \tag{5}$$

entonces

$$\overrightarrow{F}_L = q\left(-\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A} + \frac{1}{c}\overrightarrow{v} \times \left(\nabla \times \overrightarrow{A}\right)\right) \tag{6}$$

donde el doble producto vectorial lo podemos expresar de la siguiente forma

$$\overrightarrow{v} \times \left(\nabla \times \overrightarrow{A}\right) = \nabla\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{A}\right) - \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \tag{7}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_L &= q\left(-\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A} + \frac{1}{c}\left(\nabla\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{A}\right) - \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right)\right) \\
&= q\left(-\nabla\left[\Phi - \frac{1}{c}\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{A}\right] - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left[\nabla_{\overrightarrow{v}}\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{A}\right)\right]\right)
\end{aligned}$$

lo que hace que $\overrightarrow{F}_L$ se pueda escribir como fuerza lagrangiana

$$\overrightarrow{F}_L = -\nabla U + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{v}} \tag{8}$$

con $U = q\Phi - \frac{q}{c}\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{A}$.

Electrodinámica no líneal

Para la electrodinamica no líneal la constante dielectrica se expresa como

$$\varepsilon_v = \frac{\varepsilon_o}{\left(1 + \frac{1}{b^2}\left(c^2B^2 - E^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)} \tag{9}$$

y la permeabilidad se escribe como

$$\mu_v = \mu_o\left(1 + \frac{1}{b^2}\left(c^2B^2 - E^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{10}$$

donde b en ambos casos es un parametro que fija una intensidad máxima de los campos.

Al menos para campos que varían lentamente, en función de los tensores de permeabilidades eléctricas y magnética del vacío tenemos

$$D_i = \sum_k \varepsilon_{ik}E_k \quad \text{y} \quad B_i = \sum_k \mu_{ik}H_k \tag{11}$$

donde

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_o \left[\delta_{ik} + \frac{e^4\hbar}{45\pi m^4 c^7} 2 \left(E^2 - c^2 B^2 \right) \delta_{ik} + 7c^2 B_i B_k \right] + ... \tag{12}$$

$$\mu_{ik} = \mu_o \left[\delta_{ik} + \frac{e^4\hbar}{45\pi m^4 c^7} 2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) \delta_{ik} + 7E_i E_k / c^2 \right] + ... \tag{13}$$

para el límite clásico hacemos $\hbar \to 0$ y estos efectos no lineales desaparecen al comparar con la expresión clásica en (9) y (10) encontramos

$$b_q = \frac{\sqrt{45\pi}}{2} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o \hbar c}} \frac{e}{4\pi\varepsilon_o r_o^2} \approx 0.51 \frac{e}{4\pi\varepsilon_o r_o^2} = 0.51 \frac{e_G}{r_o^2} \tag{14}$$

por tanto

$$r_o = \frac{e_G^2}{mc^2} \approx 2.8 \times 10^{-15} \text{ metros} \tag{15}$$

este es el radio clásico del electrón.

Ahora si tenemos varias cargas

$$\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n} \, da \quad = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_i q_i \tag{16}$$

y si tenemos distribuciones de carga

$$\oint_S \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n} \, da \quad = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_V \rho \left(\overrightarrow{x} \right) dV \tag{17}$$

donde V es el vólumen enserrado por la superficie, ahora el teorema de la divergencia nos dice que

$$\oint_S \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} \, da \quad = \int_V \nabla \cdot \overrightarrow{v} dV \tag{18}$$

entonces aplicando este teorema en la ley de Gauss encontramos

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \tag{19}$$

y esta es la forma diferencial de la ley de Gauss.

Clase 5

Energía potencial electrostática y densidad de energía; capacitancia

Imaginemos el caso en que una carga q_i es traída desde al infinito hasta el punto $\vec{x}_i$, localizado en una región del espacio donde se conoce el potencial electrostático $\Phi(\vec{x})$. El trabajo realizado sobre esta carga es

$$W_i = q_i \Phi(\vec{x}_i).$$

Ahora bien, si este potencial es provocado por la presencia de otras $n-1$ cargas, se tiene

$$\Phi(\vec{x}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

y por tanto

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \tag{1}$$

Por un proceso mental similar, se puede ver que el trabajo total necesario para obtener el arreglo de n cargas, trayendo cada una desde infinito a una región del espacio originalmente vacía, es

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \tag{2}$$

donde i, j toman todos los valores entre 1 y n, excepto $i = j$ (autoenergías).

En el caso de una distribución continua de cargas es claro que

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x d^3x', \tag{3}$$

expresión que puede reescribirse de varias formas:

- En términos del potencial

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) d^3x. \tag{4}$$

- Utilizando la ecuación de Poisson:
$$W_{\text{total}} = -\frac{\epsilon_0}{2}\int \Phi\nabla^2\Phi d^3x. \tag{5}$$

Integrando por partes la última expresión se obtiene
$$\begin{aligned} W_{\text{total}} &= \frac{\epsilon_0}{2}\int |\nabla\Phi|^2 d^3x \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\int |\vec{E}|^2 d^3x. \end{aligned} \tag{6}$$
Por la forma de la última integral, se define la densidad volumétrica de energía como
$$w = \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2.$$

Notemos que esta densidad de energía es no negativa, y por tanto el trabajo total tampoco será negativo. Sin embargo, de (1) se ve que el trabajo para hacer un arreglo con dos cargas de signo contrario es negativo; esta contradicción surge porque en las expresiones (3 - 5) se incluyen las autoenergías en el trabajo total, mientras que en el caso discreto (2) se las excluye.

Por último, como siempre, se puede calcular la fuerza a partir de los cambios que sufre la energía ante desplazamientos virtuales pequeños.

Consideremos un sistema de n conductores, el $i-$ésimo de ellos con carga Q_i y potencial V_i. Dada la relación lineal que existe entre el potencial y la carga, podemos escribir
$$V_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}Q_j,$$
donde p_{ij} depende sólo del arreglo geométrico de los conductores. Invirtiendo las ecuaciones anteriores se obtiene
$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} C_{ji}V_i.$$
Los coeficientes C_{ii} son las *capacitancias*, y C_{ij} $(i \neq j)$ los coeficientes de inducción.

De esta forma
$$\begin{aligned} W_{\text{total}} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_iV_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}V_iV_j. \end{aligned}$$

Aproximación variacional a la solución de las ecuaciones de Poisson y Laplace

El uso de métodos variacionales es muy popular en Física. La electrodinámica no es la excepción. En efecto, la idea de considerar funcionales cuyos extremales satisfagan ecuaciones de movimiento tipo Poisson o Laplace es muy sugestiva (sobre todo por la elegancia del método variacional).

Consideremos la funcional

$$I[\psi] = \frac{1}{2}\int_V \nabla\psi \cdot \nabla\psi d^3x - \int_V g\psi d^3x, \tag{7}$$

sujeta a la condición tipo Dirichlet $\delta\psi(S) = 0$ (S es la superficie cerrada que contiene a V). Es fácil ver que $\delta I = I[\psi + \delta\psi] - I[\psi] = 0$ conduce a la ecuación de movimiento

$$\nabla^2\psi = -g.$$

Se ve que este problema no es otro que resolver la ecuación de Poisson con condiciones de frontera tipo Dirichlet.

Similarmente, para condiciones de frontera tipo Neumann, se plantea el funcional

$$I[\psi] = \frac{1}{2}\int_V \nabla\psi \cdot \nabla\psi d^3x - \int_V g\psi d^3x - \oint_S f\psi d^3x, \tag{8}$$

con

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_S = f(S).$$

Es fácil probar que $\delta I[\psi] = 0$ conduce a las ecuaciones

$$\nabla^2\psi = -g,$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_S = f(S).$$

Resulta lógico preguntar si este método variacional de obtener la ecuación de Poisson sirve para algo, o es sólo un juego matemático. Para contestar, notemos que una vez conocida la forma de los funcionales (7, 8) aún es necesario encontrar ψ (o sea resolver la ecuación de Poisson); por tanto el problema es el mismo. Sin embargo, se pueden proponer soluciones $\psi = A\Psi(\vec{x}, \alpha, \beta, ...)$ que satisfagan las condiciones de frontera dadas, para después

variacionalmente encontrar las constantes indeterminadas (notar que con esta elección $I = I[A, \alpha, \beta, ...])$. En este sentido el método variacional sirve para encontrar soluciones aproximadas.

Clase 6

Método de las imágenes

Este método se refiere a problemas de cargas puntuales en la presencia de superficies a potencial cero o constante. Las condiciones de frontera se simulan con cargas puntuales de valores y posiciones bien determinadas conocidas como "cargas imágenes".

Carga puntual con esfera a $\phi = 0$

El potencial asociado a la carga real y la carga imagen es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{q}{\mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid} + \frac{q'}{\mid \mathbf{x} - \mathbf{y}' \mid}] \ .$$

La condición de frontera es que el potencial se anule en $\mid \mathbf{x} \mid= a$. Introducimos dos vectores unitarios **n**,**n'**, uno en la dirección de **x** y el otro en la dirección de **y**, de manera que el potencial se puede expresar

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{q}{\mid x\mathbf{n} - y\mathbf{n}' \mid} + \frac{q'}{\mid x\mathbf{n} - y\mathbf{n}' \mid}] \ .$$

Factorizando x del primer término, y' del segundo y valuando en $x = a$

$$\phi(x = a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{q}{a \mid \mathbf{n} - \frac{y}{a}\mathbf{n}' \mid} + \frac{q'}{y' \mid \mathbf{n}' - \frac{a}{y'}\mathbf{n} \mid}] \ .$$

Se observa que para que el potencial se anule en la frontera de la esfera se debe satisfacer

$$\frac{q}{a} = -\frac{q'}{y'} \ , \qquad\qquad \frac{y}{a} = \frac{a}{y'}$$

resolviendo estas ecuaciones se encuentra

$$q' = -\frac{y'}{a}q = -\frac{a}{y}q, \qquad\qquad y' = \frac{a^2}{y}$$

q' es la carga total de inducción sobre la superficie de la esfera, podemos observar además lo siguiente

$$y \to a \Rightarrow q' \to -q$$

$$y \to \infty \Rightarrow q' \to 0$$

La densidad superficial de carga está dada por

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \mid_{x=a} = \frac{q}{4\pi a^2} \frac{a}{y} \frac{1 - \frac{a^2}{y^2}}{(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2\frac{a}{y} \cos\gamma)^{3/2}} \ .$$

Es posible calcular también la fuerza de atracción hacia la esfera, la magnitud de la cual está dada por

$$\mid \mathbf{F} \mid = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \frac{a^3}{y^3} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^{-2} \ .$$

Carga q en presencia de una esfera conductora cargada a Q, aislada

El potencial para esta configuración se puede expresar así

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid} - \frac{aq}{y \mid \mathbf{x} - \frac{a^2}{y^2}\mathbf{y} \mid} + \frac{Q + \frac{a}{y}q}{\mid \mathbf{x} \mid} \right] \ .$$

La fuerza de atracción en este caso es

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{y}}{y^3} \left[Q - \frac{qa^3(2y^2 - a^2)}{y(y^2 - a^2)^2} \right] \ .$$

Carga q cerca de una esfera conductora a potencial constante

Para la situación presente el potencial adopta la forma

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid} - \frac{aq}{y \mid \mathbf{x} - \frac{a^2}{y^2}\mathbf{y} \mid} \right] + \frac{Va}{\mid \mathbf{x} \mid} \ .$$

La fuerza de atracción está dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \frac{q\mathbf{y}}{y^3} \left[Va - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qay^3}{(y^2 - a^2)^2} \right] \ .$$

Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme

Un campo eléctrico uniforme es producido por ejemplo por dos cargas puntuales ±Q localizadas en $z = \pm R$ para $R \rightarrow \infty$. Si ahora una esfera conductora es colocada en el origen, el potencial será el debido a las cargas ±Q en ∓R y sus imágenes $\mp\frac{Qa}{R}$ en $z = \mp\frac{a^2}{R}$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{(r^2 + R^2 + 2rR\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{1/2}}\right] +$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{aQ}{R\left(r^2 + \frac{a^4}{R^2} + \frac{2a^2r}{R}\cos\theta\right)^{1/2}} + \frac{aQ}{R\left(r^2 + \frac{a^4}{R^2} - \frac{2a^2r}{R}\cos\theta\right)^{1/2}}\right] .$$

Como $R >> r$ podemos desarrollar los denominadores

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2Q}{R^2}r\cos\theta + \frac{2Q}{R^2}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta\right] + \cdots$$

Para $R \rightarrow \infty$, $\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ es el campo aplicado de manera que el potencial en este límite toma la forma

$$\phi_{R\rightarrow\infty} = -E_0\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta = -E_0 z + \frac{a^3}{r^3}E_0 z\ ,$$

donde el último término es el del "dipolo imagen". La densidad superficial de carga está dada por

$$\sigma = -\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial r}\ |_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0\cos\theta\ ,$$

la cual se anula al integrarla sobre la superficie

$$\int \sigma da = 0\ .$$

Función de Green para la esfera conductora

Para problemas de Dirichlet con conductores $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')/4\pi\epsilon_0$ puede ser interpretada como el potencial debido a la distribución superficial de carga inducida sobre la superficie por la presencia de una carga puntual (fuente) en el punto **x'**. Por definición la función de Green $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ satisface la ecuación

$$\bigtriangledown'^2 G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \ .$$

Para el caso de la esfera la función de Green está dada por

$$G_{esf}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{\mid \mathbf{x}-\mathbf{x}' \mid} - \frac{a}{x' \mid \mathbf{x} - \frac{a^2}{x'^2}\mathbf{x}' \mid} \ .$$

En coordenadas esféricas lo anterior es

$$G_{esf}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{\left(x^2 + x'^2 - 2xx'\cos\gamma\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\frac{x^2x'^2}{a^2} + a^2 - 2xx'\cos\gamma\right)^{1/2}} \ ,$$

$$\frac{\partial G}{\partial n'}\ |_{x'=a} = -\frac{x^2 - a^2}{a\left(x^2 + a^2 - 2ax\cos\gamma\right)^{3/2}} \sim \sigma \ .$$

Recordando la solución de la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet para el potencial

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{x}')G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3x - \frac{1}{4\pi}\oint_S \phi(\mathbf{x}')\frac{\partial G_D}{\partial n'}da'$$

usando esto, podemos escribir la solución general para el potencial de la esfera conductora para la cual conocemos el potencial en la frontera

$$\phi_{esf}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \phi(a,\theta',\varphi')\frac{a(x^2 - a^2)}{\left(x^2 + a^2 - 2ax\cos\gamma\right)^{3/2}}d\Omega' \ ,$$

donde $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$. Para el interior de la esfera $x^2 - a^2 \rightarrow a^2 - x^2$, y en el caso en el que se tienen distribuciones volumétricas de carga se tiene que tomar en cuenta la contribución de la integral de volumen.

Clase 9

Análisis de elemento finito para resolver la ecuación de Poisson

A continuación presentamos una breve introducción al análisis de elemento finito para resolver la ecuación de Poisson. Por simplicidad en la presentación sólo consideramos problemas bidimensionales.

Primeramente esbozamos el método de Galerkin para replantear la ecuación de Poisson, y dividir la región de estudio en una red cuyo número de celdas es finito. Por último presentamos dos tipos particulares de redes: cuadriculada regular y triangular.

El método de Galerkin

Sea una región bidimensional R limitada por una curva cerrada C; consideremos en R la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \psi = -g \tag{1}$$

con condiciones de frontera tipo Dirichlet; multiplicamos (1) por una función de prueba $\phi(x, y)$ que sea continua a trozos en R y tal que $\phi(C) = 0$; después integramos sobre R, obteniendo

$$\int_R [\phi \nabla^2 \psi + g\phi] dxdy = 0.$$

A continución, utilizando la primera identidad de Green (bidimensional), la integral anterior se reescribe como

$$\int_R [\nabla\phi \cdot \nabla\psi - g\phi] dxdy = 0. \tag{2}$$

El siguiente paso es dividir la región R por medio de una red con N celdas, y definir un conjunto de funciones $\{\phi_i(x, y), i = 1, 2, ..., N\}$ tal que cada una de ellas es no nula sólo en una celda particular de la red. A continuación se expresa ψ como

$$\psi(x, y) \approx \sum_{i=1}^{N} \Psi_i \phi_i(x, y);$$

sustituyendo lo anterior en (2) y escogiendo $\phi = \phi_j$ se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N} \Psi_i \int \nabla\phi_i(x,y) \cdot \nabla\phi_j(x,y) = g_0 \int_R \phi_i(x,y)dxdy \ ,$$

donde se ha supuesto que las celdas son suficientemente pequeñas como para que $g(x,y) \approx g_0$ dentro de ellas (el valor de g_0 varía de celda a celda). Con esto, (2) se reduce a la ecuación matricial

$$\mathbf{K}\Psi = G \tag{3}$$

aquí $\mathbf{K}$ es una matriz $N \times N$ con elementos

$$k_{ij} \equiv \int_R \nabla\phi_i \cdot \nabla_j dxdy$$

Ψ es la matriz columna formada con los coeficientes Ψ_i; G es una matriz columna con elementos

$$G_i \equiv g_i \int_R \phi_i(x,y)dxdy.$$

El poder del método de Galerkin radica en que, por la forma como se escojen las ϕ_i, la matriz $\mathbf{K}$ es dispersa, i.e., sólo pocos de sus elementos son diferentes de cero, y por ello es relativamente fácil conocer Ψ a partir de (3), lo cual nos da la solución a la ecuación tipo Poisson (1).

Casos particulares

Red cuadriculada regular

Se escoge una red de cuadros, cada uno de lado h; sean (x_i, y_j) las coordenadas de los vértices. Se toman las funciones $\phi_{ij}(x,y)$ tales que $\phi_{ij} \neq 0$ sólo en una vecindad de área h^2 alrededor de (x_i, y_j), y las ϕ_{ij}'s son linealmente independientes entre sí. Con esto, de acuerdo al método de Galerkin

$$\psi \approx \sum_{k,l=1}^{(N_0)} \Psi_{kl}\phi_{kl}(x,y)$$

donde se supone que el total de celdas es N_0; los coeficientes Ψ_{kl} se obtienen a partir de (3) con

$$\begin{aligned}
&\mathbf{K} = \left(\int_R \nabla\phi_{ij} \cdot \nabla\phi_{kl} dxdy\right),\\
&(G) = \left(g(x_i, y_j) \int_R \phi_{ij} dxdy\right)\\
&(\Psi) = (\Psi_i).
\end{aligned}$$

La inconveniencia del uso de redes como ésta es que se presentan casos donde el potencial varía de formas diferentes en diferentes regiones, y por ello sería más conveniente utilizar celdas irregulares. A continuación se presenta una de ellas.

Red triangular

Las redes triangulares son las más utilizadas en el análisis de elemento finito, por las razones expuestas al final de la sección anterior. Para este tipo de redes se asume que el elemento triangular (e) es lo suficientemente pequeño como para que ψ cambie poco en su interior y de hecho pueda ser aproximado de forma lineal en cada dirección:

$$\psi(x, y) \approx \psi_e(x, y) = A + Bx + Cy.$$

Sean (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3)$ las coordenadas de cada vértice del triángulo. Entonces las constantes (A, B, C) quedan determinadas por los valores de ψ en cada uno de ellos.

Con el fin de sistematizar el procedimiento, es conveniente definir las *funciones de forma* $N_j(x, y)$ (una por cada vértice), tales que $N_j^{(e)}(x_j, y_j) = 1$, $N_j^{(e \neq e_j)}(x, y) = 0$ y $N_j^{(e)}(x, y) = 0$ si $x \neq x_j$, $y \neq y_j$. Por la linealidad de ψ dentro de e, tomamos $N_j^{(e)}(x, y) = a_j + b_j x + c_j y$. De aquí, para $j = 1$

$$\begin{aligned}
a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 &= 1\\
a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2 &= 0\\
a_1 + b_1 x_3 + c_1 y_3 &= 0
\end{aligned} \tag{4}$$

de donde

$$a_1 = \frac{1}{2S_e}(x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

$$b_1 = \frac{1}{2S_e}(y_2 - y_3)$$
$$c_1 = \frac{-1}{2S_e}(x_2 - x_3)$$

donde S_e es el área del triángulo e.

Ahora, siguiendo el método de Galerkin, tomamos $\phi_i = N_i^{(e)}$. De esta forma, expresamos ψ como

$$\psi(x,y) \approx \sum_{f,j} \Psi_j^{(f)} N_j^{(f)}(x,y), \tag{5}$$

donde la suma se realiza para todos los triángulos (f) y todos los vértices de cada triángulo (j); $\Psi_j^{(f)}$ es el valor de ψ en el vértice j del triángulo f. Estos coeficientes se encuentran, para cada triángulo, a partir de una ecuación similar a (3):

$$\sum_{j=1}^{3} k_{ij}^{(e)} \Psi_j^{(e)} = \frac{1}{3} S_e g_e$$

con $k_{ij}^{(e)} \equiv S_e(b_i b_j + c_i c_j)$ (coeficentes de acoplamiento); $g_e \equiv g(\bar{x}_e, \bar{y}_e)$, y $(\bar{x}_e, \bar{y}_e)$ son las coordenadas del centro de gravedad del triángulo. A continuación sólo falta incluir todos los triángulos de la red. Para ello, considerando que los vértices interiores a C son N, y el total de vértices (interiores a C y sobre ella) es N_0, los índices corren de 1 a N para los vértices internos, y de $N+1$ a N_0 para los que están sobre la frontera. Con esto, se obtiene la ecuación equivalente a (3) para toda la red es con

$$\mathbf{K} = (k_{ij}), \quad k_{ii} = \sum_T k_{ii}^{(e)}, \quad k_{ij} = \sum_E k_{ij}, i \neq j,$$
$$G_i = \frac{1}{3} \sum_T S_e g_e - \sum_{j=N+1}^{N_0} k_{ij}^{(e)} \Psi_j^{(e)};$$

T indica que la suma es sobre los triángulos con vértice común i; E que la suma es sobre triángulos con lados entre los vértices i, j.

Como ya se dijo, $\mathbf{K}$ es una matriz dispersa, y por tanto la solución a (1) se puede encontrar como

$$\psi(x,y) \approx \sum_{f,j} \Psi_j^{(f)} N_j^{(f)}(x,y).$$